RED BUILDING TEAM

قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة السادسة

٧ صفحات

الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٢

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

تدريب :

ليكن $\vec{F} = (\vec{\imath}\,.\,\vec{r})\vec{r}$ احسب $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$ و $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$

الحل :

$$\vec{F} = \big((1,0,0)(x,y,z)\big)\vec{r}$$

$$\vec{F} = (x^2, xy, xz)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix}$$

$$= (0, -z, y)$$

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(0, -z, y) = 0$$

$$\vec{F} = (x^2, xy, xz)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix}$$

$$= (1+1)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (0+0)\hat{k} = 2\hat{\imath}$$

تدريب :

برهن أن $\vec{V} = r^3\vec{r}$ و أوجد كمونه العددي ثم احسب $\nabla^2 u$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

الحل :

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{\nabla}\times(r^3\vec{r})=(\vec{\nabla}r^3)\times\vec{r}+(\vec{\nabla}\times\vec{r})r^3=\hat{r}(3r^2)\times\vec{r}+\vec{0}$$

$$=\vec{0}\Rightarrow\vec{V}\ \text{كموني}$$

$$\vec{V}=\vec{\nabla}u$$

$$\vec{\nabla}r^3=\hat{r}\frac{dr^3}{dr}=3r^2\hat{r}$$

$$\vec{V}=\vec{\nabla}u$$

$$r^3\vec{r}=r^3r\hat{r}=\hat{r}\frac{du}{dr}$$

$$r^4=\frac{du}{dr}\Rightarrow u=\int r^4dr=\frac{r^5}{5}+c$$

$$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{du}{dr}\right]=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}=[r^2r^4]=6r^3$$

تدريب: إذا كان $\vec{u}=\left(\vec{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta+\sin\varphi$

احسب: $\vec{\nabla}\times(\nabla\vec{u})\,,\nabla^2u\,,\vec{\nabla}u$

الحل:

$$\vec{\nabla}u=\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u$$

$$=\left(1-\frac{2}{r^2}\right)\cos\theta\,\hat{r}-\frac{\hat{\theta}}{r}\left(r+\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)+\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\cos\varphi$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(1-\frac{2}{r^2}cos\theta\right]$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\sin\theta\left(r+\frac{1}{r^2}\right).\sin\theta\right]$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}(-\sin\varphi)$$

$$\nabla^2 \mathrm{u} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}(2\mathrm{r})\cos\theta + \frac{2}{\mathrm{r}^2\sin\theta}\left(\mathrm{r}+\frac{1}{\mathrm{r}^2}\right).\sin\theta\,.\cos\theta - \frac{\sin\varphi}{\mathrm{r}^2\sin^2\theta}$$
$$-\frac{\sin\varphi}{\mathrm{r}^2\sin^2\theta}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\mathrm{u}) = \vec{0}$$

مثال: برهن صحة العلاقة:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r}^2}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dr}}\left[\mathbf{r}^2\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dr}}\right]$$

البرهان $\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{df}{dr}\right]+0+0$

مثال: أثبت $\vec{\boldsymbol{\nabla}}.\left(\frac{\vec{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}^3}\right) = \mathbf{0}$:

$$\vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}^3}\right) = \left(\vec{\nabla}\frac{1}{\mathrm{r}^3}\right)\vec{\mathrm{r}} + (\vec{\nabla}.\vec{\mathrm{r}})\frac{1}{\mathrm{r}^3}$$

$$= \hat{\mathrm{r}}\left(-\frac{3}{\mathrm{r}^4}\right).\hat{\mathrm{r}}\mathrm{r} + 3\frac{1}{\mathrm{r}^3}$$

$$= -\frac{3}{\mathrm{r}^3}+\frac{3}{\mathrm{r}^3} = 0$$

مثال: أثبت $\vec{\nabla} \wedge (r\vec{r}) = \vec{0}$:

$$(\vec{\nabla} r) \wedge \vec{r} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{r}) r = \hat{r} \wedge r\hat{r} + \vec{0} r = \vec{0}$$

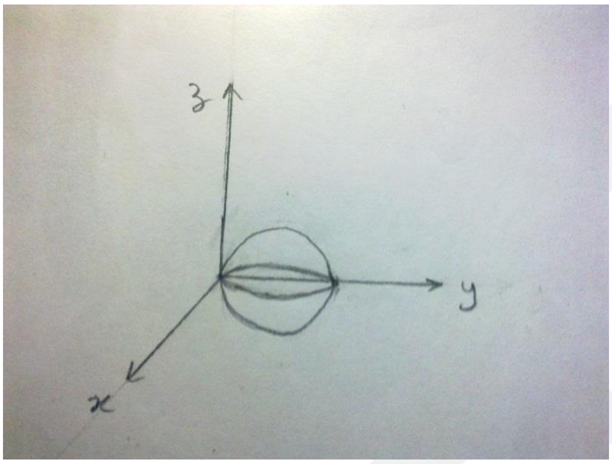
مثال: أثبت أن $\vec{\nabla}.\left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \ln r)\right] = 0$:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \ln r) = (\vec{\nabla} \ln r) \wedge \vec{r} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{r}) \ln r$$

$$= \left(\hat{r}\frac{1}{r}\right) \wedge r\hat{r} + \vec{0} \ln r$$

مثال: أحسب تدفق $\vec{F} = r\vec{r}$ عبر السطح الموجه

المغلق $\Sigma: x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$



$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iiint_{\mathbb{R}} \vec{\nabla}.\vec{F} dv = \iiint_{\mathbb{R}} 4 dv$$

$$: \vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}.(r\vec{r}) = (\vec{\nabla} r)\vec{r} + (\vec{\nabla}\vec{r}) r =$$

$$\left(\hat{r}\frac{dr}{dv}\right)\vec{r} + 3r = 4r$$

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

$$r^2 - 2r.\sin\theta.\sin\varphi = 0$$

$$r = 2\sin\theta.\sin\varphi$$

θ الزاوية من oz إلى $\vec{r}$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$0 \leq \varphi \leq \pi$

حيث φ الزاوية بين مسقط r على oxy والـox

$$I = 4\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\sin\theta\sin\varphi} r r^2 dr$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, [2^4 \sin^4\theta \sin^4\varphi] d\theta$$

تذكر: اليعقوبيان $|J| = r^2 . \sin\theta$

$$= 2^4 \int_0^{\pi} \sin^4\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5\theta \, d\theta$$

$$\sin^5\theta = \sin^4\theta \sin\theta = (1-\cos^2\theta)^2 \sin\theta$$

$$\sin^5\theta \, d\theta = -(1-t^2)^2 dt$$

$$\int \sin^5\theta \, d\theta = -(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5})$$

الجواب : $\frac{8}{5}\pi \Leftarrow$

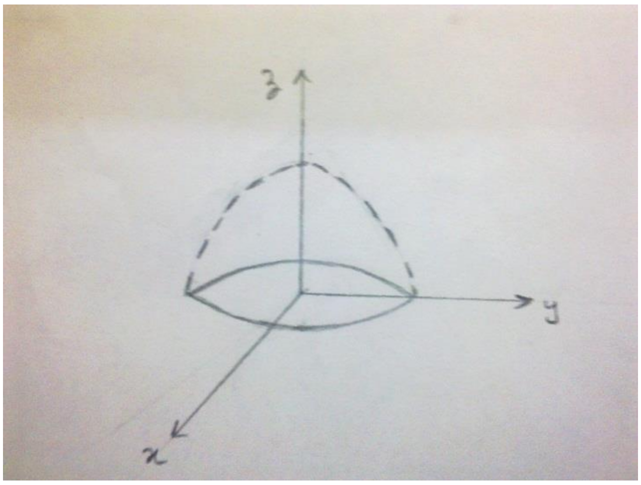
تمرين: احسب جَولان $\left(2y\,, 3x\,, -z^2\right) = \vec{F}$ حول المنحني

$$\Gamma: \left\{ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,, \qquad z = 0 \right\}$$

الحل :

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{F}\,\vec{dl}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي



$$\vec{dl} = (dx\,,dy\,,0)$$

$$\vec{F}\,\vec{dl} = (2y\,,3x\,,-z^2)(dx,dy,0)$$

$$= 2y\,dx + 3x\,dy$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} 18\sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} 27\cos^2 t\,dt = 9\pi$$

طريقة ٢) : نظرية ستوكس

$$\vec{ds} = \vec{\nabla} G dxdy = \left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \hat{k}$$

$$I = \iint_{R_3} \hat{k}.\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$= \iint_{R_3} 1\,dxdy = 9\pi$$

تمرين :

ليكن : $u = \rho(\,sin\varphi - cos\varphi) + \sqrt{p^2 + z^2}$

حيث : $\varepsilon : \{ z = 0 , z = 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \}$

أثبت أن :

$$I = \oiint_{\varepsilon} \overrightarrow{ds} \times \overrightarrow{\nabla u} = \vec{0}$$

الحل :

$$I = \iiint_R (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u)\, dv = \iiint_R \vec{0}\, dv = \vec{0}$$

غالبا ما يكون النجاح حليف هؤلاء الذين يعملون بجرأة، ونادراً ما يكون حليف أولئك المترددين الذي يتهيبون المواقف ونتائجها.

(رونالد .اسبورت)